BAREME CLASA A 5-A

Subiectul 1

Numerele naturale a, b, c, d verifică relația:

$$2^{a+b}+2^{b+c}+2^{c+d}+2^{d+a}=25.$$

Calculați $a+b+c+d$.

Gazeta Matematică 1/2006

Solutie:

Din studiul paritatii, deducem ca cel putin unul din termenii membrului stang este impar, adica egal cu 1..1p

Daca, de exemplu, $2^{a+b}=1$, atunci a+b=0 si cum numerele a si b sunt naturale, rezulta ca a=b=0...1p

Atunci relatia din ipoteza se scrie $2^c+2^d+2^{c+d}=24$.......................................1p

Studiul ordinului de marime ne da $2^c,\ 2^d \in\ 1;2;4;8;16$ 1p

Dintre toate valorile de mai sus convin numai c=d=2.......................................1p

Obtinem a+b+c+d=4...1p

Datorita simetriei circulare a sumei din membrul stang al egalitatii din ipoteza, pentru orice alegere a termenului egal cu 1 vom obtine a+b+c+d=4.................1p

Subiectul 2

Fie mulțimile:

$M_1 =\ 1\ ;\ M_2 =\ 1;3\ ;\ M_3 =\ 1;3;6\ ;\ M_4 =\ 1;3;6;10\ ;\ M_5 =\ 1;3;6;10;15\ ;.....$

a) Arătați că există $k,p\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $55\in M_k - M_p$.

b) Există $t\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $2006\in M_t$?

c) Aflați numărul elementelor divizibile cu 5 din M_{2006}.

Prof. Nicolae Stănică, Brăila

Solutie:

Elementele multimilor sunt de forma:

1; 1+2; 1+2+3, 1+2+3+…+n sau $\frac{1\cdot 2}{2};\frac{2\cdot 3}{2};\ldots;\ \frac{n\cdot(n+1)}{2}$. 2p

a) 55 = $\frac{10\cdot 11}{2}$ de aici avem ca $55 \in M_{10} \setminus M_9$ 1p

b) $\frac{63\cdot 64}{2} = 2016$, $\frac{62\cdot 63}{2} = 1953$ de aici rezulta ca nu exista $t \in \mathbb{N}^*$ astfel incat $2006 \in M_t$. 1p

c) Numerele care se impart exact la 5 din M_{2006} sunt de forma $\frac{(5k-1)5k}{2}$ sau $\frac{5k(5k+1)}{2}$ si primele doua numere sunt $\frac{4\cdot 5}{2}$, $\frac{5\cdot 6}{2}$ iar ultimele doua numere sunt $\frac{2004\cdot 2005}{2}$, $\frac{2005\cdot 2006}{2}$. 1p

In concluzie sunt $2\cdot 401 = 802$ numere care se impart exact la 5 ....1p

Subiectul 3

Determinați numerele de forma $\overline{abcd}$ care îndeplinesc simultan condițiile:

i) $\overline{abcd}$ este divizibil cu 2;

ii) $\overline{abcd}$ este pătrat perfect;

iii) $\overline{ab}$ împărțit la $\overline{cd}$ dă câtul 2 şi restul 19.

Prof. Daniela Tilincă, Brăila

Solutie:

$\overline{abcd}$ patrat perfect si numar par => $\overline{abcd} \in \overline{abco}, \overline{abc4}, \overline{abc6}$ 1p

$\overline{ab} = 2\cdot\overline{cd} + 19$ $\overline{cd} > 19 \Rightarrow c > 1$

$I)\overline{ab} = 2\cdot\overline{co} + 19$ pentru c=2,3,4 => $\overline{abcd} \in$ 5920,7930,9940

care sunt divizibile cu 5 dar nu sunt divizibile cu 5^2 ;

pentru c>4 , $2\cdot\overline{co} + 19 > \overline{ab}$ 2p

$II)\overline{ab} = 2\cdot\overline{c4} + 19$ pentru c=2,3 => $\overline{abcd} \in$ 6724,8734}

8734 nu este patrat perfect pentru ca $\vdots 2$,dar nu $\vdots 2^2$

iar 6724=82^2 solutie ; pentru c>3 , $2\cdot\overline{c4} + 19 > \overline{ab}$ 2p

III) $\overline{ab} = 2\cdot\overline{c6} + 19$ pentru c=2,3 => $\overline{abcd} \in$ 7126,9136}

$7126 \vdots 2$, *dar* nu e divizibil cu 2^2iar 9136 =$2^4\cdot 571$ dar 571 nu este patrat perfect $23^2 = 529 < 571 < 576 = 24^2$;pentru c>3 , $2\cdot\overline{c6} + 19 > \overline{ab}$

solutia este 6724 ....2p

Subiectul 4

Fiecare element al mulțimii $A=\{1;2;3;...;98;99;100\}$ se colorează cu una din culorile roşu, galben şi albastru, respectând următoarele reguli:

i) suma dintre orice număr galben şi orice număr albastru este divizibilă cu 3;
ii) suma oricăror două numere roşii este divizibilă cu 3.

a) Să se arate că numărul 3 este roşu.
b) Să se calculeze suma tuturor numerelor care nu sunt roşii.

Prof. Marius Damian, Brăila

Solutie:

a) Dacă, prin absurd, numărul 3 nu ar fi roşu, atunci el ar fi galben sau albastru.

Dacă 3 ar fi galben, atunci, din condiția i) deducem că numerele 6, 9, 12, ..., 99 sunt galbene sau albastre, iar celelalte numere: 1, 2, 4, 5, 7, 8, ..., 97, 98 sunt roşii. Cum $1+4=5$ care nu este multiplu de 3, se contrazice condiția ii).

Dacă 3 ar fi albastru, printr-un raționament asemănător, obținem din nou contradicție.

In concluzie, numărul 3 este roşu...**3p**

b) Din a) rezultă că toate numerele: 3, 6, 9, ..., 93, 96, 99 sunt roşii. In plus, acestea sunt singurele numere roşii, deoarece, în caz contrar, dacă un număr nedivizibil cu 3 ar fi roşu, atunci s-ar contrazice condiția ii).

Suma numerelor care nu sunt roşii este aşadar:

$$S=(1+2+...+100)-(3+6+...+99)=$$
$$=(1+2+...+100)-3(1+2+...+33)=$$
$$=\frac{100\cdot 101}{2}-3\cdot\frac{33\cdot 34}{2}=3367.$$

....**4p**